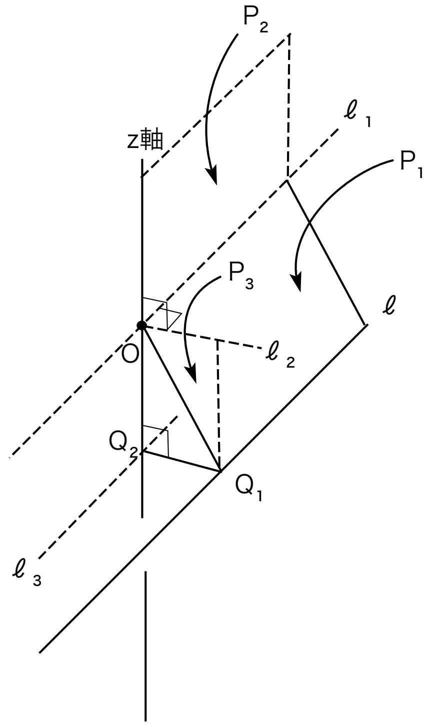
【存在の証明】（ア）原点 O と ℓ が定める平面を P_1 とする。（イ）P_1 上で、O を通り ℓ に平行な直線を ℓ_1 とする。（ウ）z 軸と ℓ_1 が定める平面を P_2 とする。（エ）O を通り P_2 に垂直な直線を ℓ_2 とする。（オ）z 軸と ℓ_2 が定める平面を P_3 とする。（カ）P_3 と ℓ の交点を Q_1 とする。（キ）Q_1 から z 軸に降ろした垂線の足を Q_2 とする。（ク）直線 Q_1Q_2 は z 軸、ℓ の両方に直交する。



（ア）（イ）：ℓ は原点Oを含まないので P_1 は一意に定まる。（ウ）：z 軸と ℓ_1 はOを共有し平行でない（仮に平行であれば z 軸と ℓ も平行となり前提に反する）ため P_2 は一意に定まる。（エ）：ℓ_2 の存在は自明。（オ）：z 軸と ℓ_2 はOを共有し平行でないため、P_3 は一意に定まる。（カ）：P_3 は ℓ_1 と１点Oのみを共有する（仮に ℓ_1 が P_3 上にあるならばz 軸と ℓ_1 はともにOを通る ℓ_2 の垂線であるため同一となり前提に反する）。ℓ と ℓ_1 は平行なので、ℓ も P_3 と１点のみを共有する（仮に ℓ も P_3 上にあるか、または ℓ と P_3 が平行であるならば、Oを通り ℓ に平行な直線が P_3 上に引けることになり、ℓ_1 が P_3 上にないことと矛盾する）。（キ）：Q_2 の存在は自明。（ク）：ℓ_2 と Q_1Q_2 は、ともに P_3 上にあり、同位角が等しいため平行である。ℓ_2 は P_2 と垂直であるため、Q_1Q_2 も P_2 と垂直である。Q_2 を通り ℓ_1 に平行な直線を ℓ_3 とすると、Q_1Q_2 は ℓ_3 と垂直である。ℓ_3 と ℓ は平行だから、Q_1Q_2 と ℓ は垂直である。（証明終わり）

【一意性の証明】点 Q_1', Q_2'をそれぞれ z 軸、ℓ 上の点とし、$Q_1'Q_2'$と z 軸、$Q_1'Q_2'$と ℓ はそれぞれ垂直であるものとする。このとき、Q_2'を通り ℓ に平行な直線を ℓ_3' 、$Q_1'Q_2'$と z 軸が定める平面を P_3'、P_3'上で O を通り $Q_1'Q_2'$と平行な直線を ℓ_2'とすると、$Q_1'Q_2' \perp \ell_3'$より $Q_1'Q_2'$は P_2 に垂直であり、従って ℓ_2' も P_2 に垂直である。このことから、ℓ_2'と ℓ_2 は同一なので、$Q_1'Q_2'$は前半の手順で得た Q_1, Q_2 と同一である。（証明終わり）